Заключительный тур Олимпиады

Дата: 26.05.2020

Время начала: 11:02

Время окончания: 13:02

ФИО участника: Кечаев Лев Сергеевич

Лист 1

Задача №1: $\vec{r}(t) = 2t^3\vec{e_x} + 3t^2\vec{e_y} + 4t\vec{e_z} = \{2t^3; 3t^2; 4t\} = \{r_x; r_y; r_z\}$

$\dot{\vec{r}}(t) = \left\{\frac{\partial r_x}{\partial t}; \frac{\partial r_y}{\partial t}; \frac{\partial r_z}{\partial t}\right\} = \{6t^2; 6t; 4\} = \vec{v}(t)$

Модуль вектора (по определению): Пусть $\vec{y}$ - вектор, тогда $|\vec{y}| = \sqrt{(y_x)^2+(y_y)^2+(y_z)^2}$, где y_x, y_y, y_z - компоненты вектора по осям

Для данного случая: $|\vec{v}| = \sqrt{(6t^2)^2+(6t)^2+4^2} =$

$= \sqrt{36t^4+36t^2+16}$. При $t=2$: $|\vec{v}| = \sqrt{36\cdot16+36\cdot4+16} =$

$= \sqrt{736} \approx 27{,}1$ м/с

Ответ: 27,1 м/с

Задача №4: 1) $V(T) = \alpha T^{1/3}$ Обозначим T_0 - температура соответствующая V_0, T_1 - температура, соответствующая $2V_0$.

2) Работа газа есть: $A = \int_{V_0}^{2V_0} p\,dV$.

3) Найдем dV из $V = \alpha T^{1/3}$: $dV = \alpha T^{-2/3}\cdot 1/3\, dT = \frac{\alpha}{3} T^{-2/3}\, dT$

4) $A = \int_{V_0}^{2V_0} p\,dV = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{\nu RT}{V}\,dV$ (использовано основное уравнение $PV = \nu RT$) = (см. оборот)

Заключительный тур Олимпиады

Дата: 26.05.2020

Время начала: 11:02

Время окончание: 13:02

Фио участника: Нечаев Лев Сергеевич

Лист 2

$= \{$Подставим dV и перейдем к другим пределам интегрирования по $T\}$ $= \int_{T_0}^{T_1} \frac{\nu R T}{V} \frac{\alpha}{3} T^{-2/3} dT = \frac{\nu R}{3} \int_{T_0}^{T_1} T^{1/3} \frac{\alpha}{V} dT =$

$= \left\{ \frac{V}{\alpha} = T^{1/3} \right\} = \frac{\nu R}{3} \int_{T_0}^{T_1} \frac{T^{1/3}}{T^{1/3}} dT = \frac{\nu R}{3} \int_{T_0}^{T_1} dT = \frac{\nu R}{3} T \Big|_{T_0}^{T_1} = \frac{\nu R}{3}(T_1 - T_0) =$

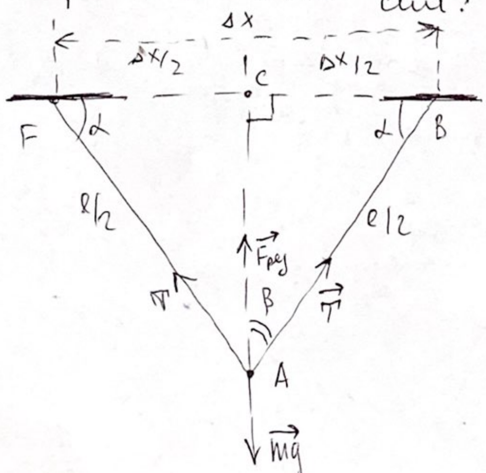
$= \{$Используя $V(T) = \alpha T^{1/3}$ получим T_1 и T_0: $T_1 = \left(\frac{2V_0}{\alpha}\right)^3$ $T_0 = \left(\frac{V_0}{\alpha}\right)^3 \}$ $=$

$$= \frac{\nu R}{3}\left(\frac{8V_0^3}{\alpha^3} - \frac{V_0^3}{\alpha^3}\right) = \frac{\nu R}{3} \frac{7 V_0^3}{\alpha^3}$$

Ответ:

$$A = \frac{7}{3} \nu R \left(\frac{V_0}{\alpha}\right)^3$$

Задача № 3: 1) Для начала необходимо сделать рисунок с расстановкой сил:



2) Очевидно, что $AB = \ell/2$
$BC = \Delta x/2$
$AC \perp BF$.

Пусть $d = AC = \sqrt{(\ell/2)^2 + (\frac{\Delta x}{2})^2} =$
$= \sqrt{\frac{\ell^2 + \Delta x^2}{4}}$, T - сила натяжения нити

m - масса бусинки.

Заключительный тур Олимпиады

Дата: 26.05.2020

Время начала: 11:02

Время окончания: 13:02

ФИО участника: Нечаев Лев Сергеевич

Лист 3

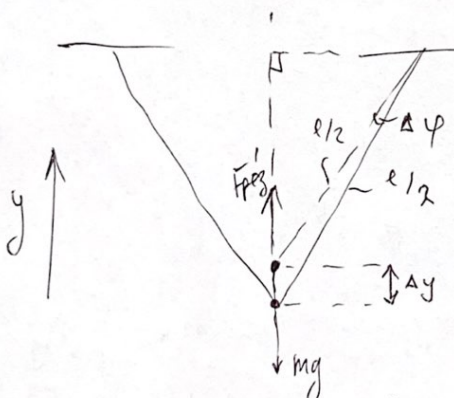
Задача №3 (продолжение):

3) Напишем баланс сил (когда всё в покое).

$mg = F_{рез}$, отметим, что $F_{рез} = 2 \cdot T \cdot \cos\beta$

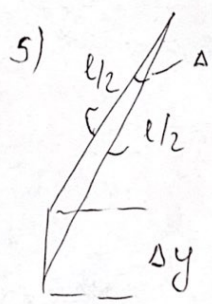
Из этого условие: $T = \frac{mg}{2\cos\beta}$.

4) Далее необходимо подробнее рассмотреть „маленький" треугольник. Сделаем ещё раз рисунок:



$\Rightarrow$

5)



$\Delta y = \frac{l}{2} \cdot \Delta\varphi$

т.к. всё „малое", то $y = \frac{l}{2} \cdot \varphi$

$\varphi = \left(\frac{l}{2}\right)^{-1} \cdot y$

6) Обратим внимание, что $F_{рез}' = 2 \cdot T\cos\beta'$,

а $\beta' = 90 - \alpha'$ $\quad \underbrace{\alpha = \alpha' + \varphi \quad \alpha = 90 - \beta}$

$$\Downarrow$$

$$90 - \beta - \varphi = \alpha'$$

$$\Downarrow$$

$$\beta' = \beta + \varphi$$

$F_{рез}' = 2T\cos\beta' = 2T\cos(\beta+\varphi) = 2T(\underbrace{\cos\beta\cos\varphi}_{\varphi\to 0} - \underbrace{\sin\beta\sin\varphi}_{\varphi\to 0}) =$

Заключительный тур Олимпиады

Дата: 26.05.2020

Время начала: 11:02

Время окончания: 13:02

ФИО участника: Нечаев Лев Сергеевич

Лист 4

Задача №3 (продолжение):

$$F'_{рез} = (\text{см. лист } 3) = \left\{ \begin{matrix} \cos\varphi \to 1 \\ \sin\varphi \to \varphi \end{matrix} \ \text{при } \varphi \to 0 \right\} =$$

$$= 2T(\cos\beta \cdot 1 - \sin\beta \cdot \varphi) = \left\{ \text{из п. } 3 \ T = \frac{mg}{2\cos\beta} \right\} =$$

$$= \frac{2mg\cos\beta}{2\cos\beta} - \frac{2mg}{2\cos\beta}\sin\beta \cdot \varphi = mg - mg\,\mathrm{tg}\beta \cdot \varphi$$

7) Далее используя предположение о малых колебаниях, т.е. система выведена из равновесия, с помощью второго закона Ньютона составим уравнение колебаний по оси y (п.4).

$$ma = m\ddot{y} = F_{рез}' - mg = mg - mg\,\mathrm{tg}\beta \cdot \varphi - mg$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{y} = -g\,\mathrm{tg}\beta \cdot \varphi, \quad \ddot{y} + g\,\mathrm{tg}\beta\,\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{y \cdot 2}{\ell}, \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta x/2}{d} = \frac{\Delta x}{2d}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{y} + \omega \cdot y = 0, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{g\,\Delta x}{d \cdot \ell} = \frac{2g}{\ell}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ell}{\Delta x}\right)^2}}$$

Ответ: $\dfrac{2g}{\ell}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ell}{\Delta x}\right)^2}}$