Чистовик

Задача №4.

Дано:

$V(T) = \alpha\sqrt[3]{T}$

$\alpha = const$

$\nu = \frac{m}{M}$, $V_1 = V_0$

$V_2 = 2V_0$,

$\left(T_1 = \left(\frac{V_0}{\alpha}\right)^3; T_2 = \left(\frac{2V_0}{\alpha}\right)^3\right)$

Найти: A - ?

Решение:

Работа в процессе:

$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$; прием, согласно уравнение Менделеева-Клапейрона:

$PV = \frac{m}{M}RT$; $\Rightarrow P = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}$

$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{mV}dV$, подставим:

$dV = \frac{\alpha}{3}\frac{dT}{\sqrt[3]{T}^2}$

$$A = \int_{V_0}^{2V_0} \nu\frac{RT\alpha\,dT}{3\sqrt[3]{T^2}\alpha\sqrt[3]{T}} = \frac{\nu}{3}R\int_{\left(\frac{V_0}{\alpha}\right)^3}^{\left(\frac{2V_0}{\alpha}\right)^3} dT = \frac{7\nu R}{3\alpha^3 V_0^3}$$

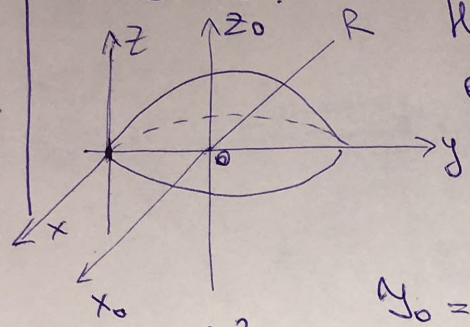
Ответ: $A = \frac{7\nu R}{3\alpha^3 V_0^3}$.

Задача N2

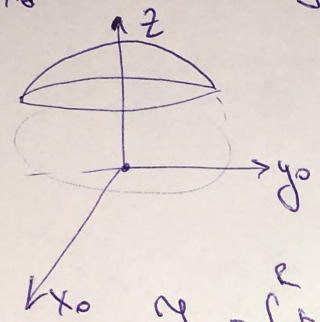
Дано:
m, r

Найти:
$J - ?$

Решение:



Найдём момент инерции относительно оси проходящей через центр $(0, z_0)$



$$J_0 = \int_0^R \frac{\rho \pi r^4}{2} dz$$

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$dz = -\frac{2r dr}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{-r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}};$$

$$J_0 = \int_0^R \frac{\rho \pi r^5 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \rho \pi R^5 \int_0^R \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^5 d\left(\frac{r}{R}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{сделаем замену:} \\ \frac{r}{R} = \sin\gamma \end{array} \right\} = \rho \pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\gamma \, d\gamma =$$

$$= \frac{\rho \pi R^5}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos(2\gamma)\right)^2 d\gamma =$$

$$= \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \cdot \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2;$$

Согласно теореме Штейнера:

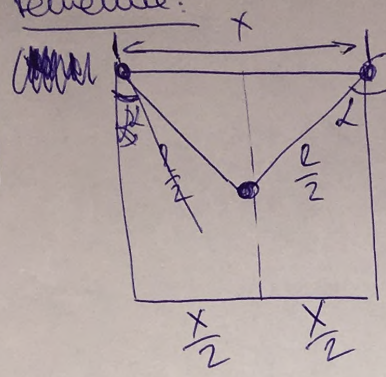
$$J_z = J_0 + mR^2 = \frac{7}{5} m R^2$$

Ответ.

Задача N 3

Дано: Δx, l

Решение:



Рассмотрим уравнение движения бусинки, при её отклонении Δx.

Потенциальная энергия бусинки:

$U = mg x_0 \cos\beta$;

далее из геометрических соотношений:

$$\begin{cases} x_0 \cdot \cos\beta = (l - x_0)\cos\alpha; \\ \sin\alpha\,(l - x_0) + \sin\beta\, x_0 = x; \end{cases}$$

$$x_0 \cos\beta = (l - x_0)\sqrt{1 - \sin^2\alpha};$$

$$x_0 \cos\beta = (l - x_0)\sqrt{\left(1 - \frac{x - \sin\beta\, x_0}{l - x_0}\right)^2}$$

$$(x_0 \cos\beta)^2 = (l - x_0)^2 - (x - \sin\beta\, x_0)^2;$$

$$x_0^2 = l^2 - x_0^2 - x^2 + 2x x_0 \sin\beta;$$

$$2x_0^2 + x^2 - l^2 = 2x x_0 \sin\beta;$$

Относительно положения равновесия:

$$x_0 = \frac{l}{2}; \quad \sin\beta = \sin\alpha = \frac{x}{l}$$

$$\sin\beta = \frac{2x_0^2 + x^2 - l^2}{2x \cdot x_0}$$

$$U = \frac{mg}{2x}\sqrt{(2x x_0)^2 - (2x_0^2 + x^2 - l^2)^2} =$$

$$= \frac{mg}{2x}\sqrt{4x^2 x_0^2 - 2\left(x_0^2 (x^2 - l^2)\right) + (l^2 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{mg(l^2 - x^2)}{2\frac{l}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{4e^2}{(e^2 - x^2)^2} x_0^2} =$$

$$\simeq \frac{2mg\,x_0^2\,l^2}{(l^2-x^2)\,l};$$

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x_0} = 4\frac{mg\,x_0\,l}{(l^2-x^2)},$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x}_0 + 4\frac{mgl}{(l^2-x^2)}x_0 = 0;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4mgl}{l^2-x^2}} = 2\sqrt{\frac{gl}{l^2-x^2}}$$

ответ.