№1.

$\vec{r}(t) = 2t^3\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y + 4t\vec{e}_z$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2\cdot 3t^2\vec{e}_x + 3\cdot 2t\vec{e}_y + 4\vec{e}_z =$

$\cancel{= 6t^2 + 6t} = \underbrace{6t^2}_{v_x}\vec{e}_x + \underbrace{6t}_{v_y}\vec{e}_y + \underbrace{4}_{v_z}\vec{e}_z$

$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 16} =$

$= \sqrt{4(9t^4 + 9t^2 + 4)} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^2(t^2+1) + 4}$

$|\vec{v}(t=2)| = 2\sqrt{9\cdot 4(\underbrace{4+1}_{5}) + 4} = 2\sqrt{180+4} = 2\sqrt{184} =$

$= 2\cdot 2\sqrt{45+1} = 4\sqrt{46}$.

Ответ: $|\vec{v}(t=2)| = 4\sqrt{46}$.

№5.

$\rho(r) = -\alpha r$ в СИ!

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (первое ур-ие Максвелла)

$\int \operatorname{div}\vec{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$

по теореме Острогр.-Гаусса.

$\int(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int -\alpha r\, dV$

интегрируем по сфере радиуса r (на ней $E = const$)

$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{-1}{\varepsilon_0}\int_0^R \alpha r\cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr} = -\frac{4\pi\alpha}{\varepsilon_0}\frac{r^4}{4}\Big|_0^R$ (и пронтегр. по углам).

$E\cdot \cancel{4\pi} r^2 = -\frac{\cancel{4\pi}\alpha}{\varepsilon_0}\frac{R^4}{4} \Rightarrow E = -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 r^2}$ (см. продолжение)

№5 (продолжение).

$$E(r) = -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

$$E(2R) = -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 (2R)^2} = -\frac{\alpha R^2}{16\varepsilon_0}.$$ (2R от центра шара)

$$\varphi(r) = -\int E\,dr + \varphi_\infty = +\int \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 r^2}dr + \varphi_\infty =$$

$$= \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right) + \varphi_\infty = -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 r} + \varphi_\infty$$

$$\varphi(2R) = -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 \cdot 2R} + \varphi_\infty = -\frac{\alpha R^3}{8\varepsilon_0} + \varphi_\infty$$

До черты фрагмент, в кот. посчитал E и φ на расст. 2R от центра шара (по условию не нужно)

$$\varphi = -\int_\infty^{2R} -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\int_\infty^{2R}\frac{1}{r^2}dr = \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^{2R} =$$

$$= -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \cancel{\frac{1}{\infty}}_{\,0}\right) = -\frac{\alpha R^4}{8\varepsilon_0 R} = -\frac{\alpha R^3}{8\varepsilon_0} = \varphi(2R).$$

~~Ответ~~ $$E(3R) = -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 (3R)^2} = -\frac{\alpha R^2}{36\varepsilon_0}$$ (2R от центра шара)

(3R от центра шара и 2R от поверх.)

Здесь посчитаны E и φ на расст. 2R от поверх. шара

$$\varphi = -\int_\infty^{3R} E\,dr = +\int_\infty^{3R}\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3R} - \cancel{\frac{1}{\infty}}_{\,0}\right) =$$

$$= -\frac{\alpha R^3}{12\varepsilon_0}.$$ (3R от центра шара и 2R от поверх. шара).

Ответ: E и φ на расстоянии 2R от поверхн. шара равны:

$$E = -\frac{\alpha R^2}{36\varepsilon_0};\quad \varphi = -\frac{\alpha R^3}{12\varepsilon_0}.$$

№4.

$V(T) = \alpha T^{1/3}$ $\qquad V_0 \to 2V_0$

$$A = \int_{V_0}^{2V_0} p\,dV$$ – работа газа

Т.к. газ идеальный, то для него справедливо ур-ие Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V}$

$$T^{1/3} = \frac{V}{\alpha} \qquad T = \left(\frac{V}{\alpha}\right)^3$$

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

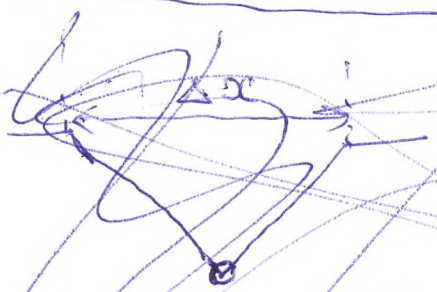
$$\Rightarrow p(V) = \frac{\nu R V^3}{\alpha^3 V} = \frac{\nu R V^2}{\alpha^3}$$

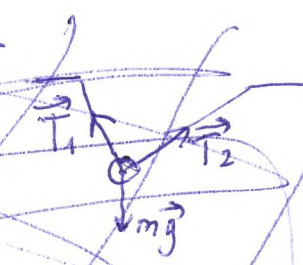
$$A = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{\nu R V^2}{\alpha^3}\,dV = \frac{\nu R}{\alpha^3}\int_{V_0}^{2V_0} V^2\,dV = \frac{\nu R}{\alpha^3}\,\frac{V^3}{3}\Big|_{V_0}^{2V_0} =$$

$$= \frac{\nu R}{3\alpha^3}\left(\underbrace{(2V_0)^3}_{8V_0^3} - V_0^3\right) = \frac{7\nu R V_0^3}{3\alpha^3}$$

Ответ: $A = \frac{7\nu R V_0^3}{3\alpha^3}$.

№3.





3(2):

$$m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g}$$

$$\frac{m\dot{y}^2}{2} + mgy = const \qquad m\ddot{y} + mg\dot{y} = 0$$

$$x_1 + x_2 = l$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \qquad \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$

$$\Delta x = x_1\cos\varphi_1 + x_2\cos\varphi_2$$

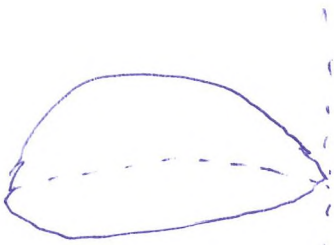
$$x_1 + x_2 = l$$

$$x_1 = l - x_2$$

$$\Delta x = (l - x_2)\cos\varphi_1 + x_2\cos\varphi_2$$

$$r = (x_1 \sin\varphi)^2$$

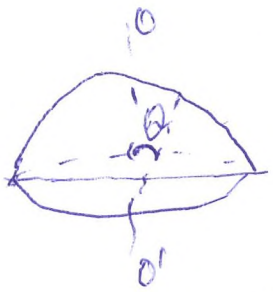
№2.



$$J = \int R^2 dm \text{ — момент инерции}$$

$$V = V_{\text{полушара}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{2\pi r^3}$$



Найдём сначала момент инерции относительно оси, проходящей через центр полушара, а затем по теореме Гюйгенса-Штейнера найдем ~~требуе~~ требуемый момент инерции: $J = J_0 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2$

$$J_0 = \int R^2 dm = \int R^2 \rho \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR =$$

$$dm = \rho dV = \rho \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$r \in [0, r]$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r R^4 dR \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta =$$

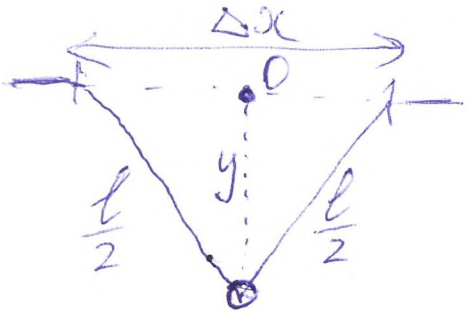
$$= \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5}\Big|_0^r \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi\rho r^5}{5}(1-0)$$

$$J_0 = \frac{\cancel{2\pi} \cdot 3mr^5}{\cancel{2\pi} r^3 \cdot 5} = \frac{3}{5} mr^2$$

$$J = J_0 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{5}mr^2 + \frac{mr^2}{4} = mr^2\left(\frac{12+5}{20}\right) = \frac{17mr^2}{20}$$

Ответ: $J = \frac{17mr^2}{20}$.

№3.

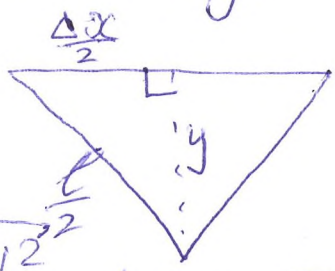


Т.к. по условию колебания малые, то будем считать, что расстояние от бусинки до точки O ~~будет считать~~ нить постоянно (на рис. обозначено y).

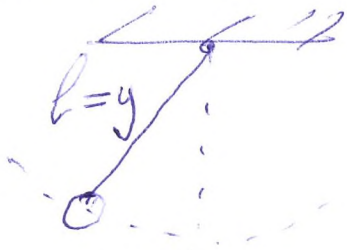
~~Но~~

Тогда задача сводится к ~~на~~ нахождению циклической частоты математического маятника с длиной нити y.

Найдём y:



$$y^2 = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{l^2-(\Delta x)^2}$$



$$J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$J = ml^2 \qquad \sin\varphi\big|_{\varphi\to 0} \approx \varphi$$

$$\cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} + \cancel{m}g\cancel{l}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2}\varphi = 0$$

ω^2 – квадрат циклич. частоты.

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad l = y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{1}{2}\sqrt{l^2-(\Delta x)^2}}} = \sqrt{\frac{2g}{\sqrt{l^2-(\Delta x)^2}}}$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2g}{\sqrt{l^2-(\Delta x)^2}}}$