4. ν

$V(T) = \alpha \cdot T^{1/3}$

$V_1 = V_0$

$V_2 = 2V_0$

$A - ?$

Запишем уравнение состояния идеального газа:

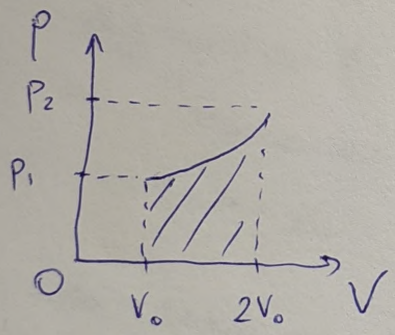
$pV = \nu RT.$

Запишем найдем зависимость p от V:

$p = \frac{\nu RT}{V}$; По условию $V(T) = \alpha \cdot T^{1/3}$, => тогда $T = \frac{V^3}{\alpha^3}$.

Получаем: $p = \frac{\nu R V^3}{V \cdot \alpha^3} = \frac{\nu R V^2}{\alpha^3}$.

Построим схематичный график данной функции:



Площадь под данным графиком будет численно равна работе газа при его расширении:

$$A = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{\nu R V^2 dV}{\alpha^3} = \frac{\nu R V^3}{3\alpha^3}\Big|_{V_0}^{2V_0} = \frac{\nu R \cdot 8V_0^3}{3\alpha^3} - \frac{\nu R V_0^3}{3\alpha^3} =$$

$$= \frac{7\nu R V_0^3}{3\alpha^3}.$$

Ответ: $A = \frac{7\nu R V_0^3}{3\alpha^3}$.

Потенциал найдем как:

$$\varphi = \int_0^{3R} \frac{k\,q(r)\,dr}{3R} = \int_0^{3R} \frac{k\cdot\alpha\cdot r^2\cdot 4\pi r^2\,dr}{9R} = \int_0^{3R} \frac{k\alpha\cdot 4\pi r^4\,dr}{9R} =$$

$$= \frac{k\alpha\cdot 4\pi\cdot r^5}{5\cdot 9R}\Bigg|_0^{3R} = \frac{k\cdot\alpha\cdot 4\pi\cdot 243R^5}{5\cdot 9R} = \frac{108\cdot k\cdot\alpha\cdot\pi\cdot R^4}{5}.$$

Ответ: $E = \dfrac{36\,\alpha k\pi R^3}{5}$

$$\varphi = \frac{108 k\alpha\pi R^4}{5}.$$

Заключительный тур Олимпиады

Дата: 26.05.2020

Время начала: 15:00

Время окончания: 17:20

ФИО участника: Чмыхало Дмитрий Александрович

1. $\vec{r}(t) = 2t^3\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y + 4t\vec{e}_z$;

Возьмём производную по t и найдем зависимость вектора скорости от времени:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 6t^2\vec{e}_x + 6t\vec{e}_y + 4\vec{e}_z;$$

$$\vec{v}(2) = 6\cdot 2^2\vec{e}_x + 6\cdot 2\cdot\vec{e}_y + 4\cdot\vec{e}_z =$$

$$= 24\vec{e}_x + 12\vec{e}_y + 4\vec{e}_z.$$

Тогда модуль скорости тела в момент времени $t = 2c$ будет равен:

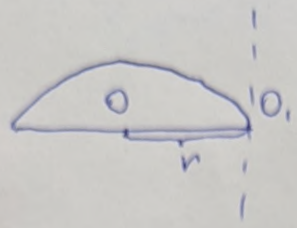
$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{576 + 144 + 16} =$$

$$= \sqrt{736} = 4\sqrt{46} \text{ м/с}.$$

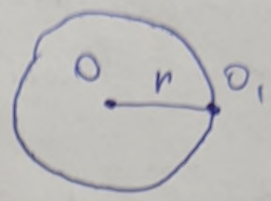
Ответ: $|\vec{v}(2)| = \sqrt{736} = 4\sqrt{46}$ м/с.

2. m, r

$I - ?$



Вид сверху:



По теореме Штейнера: момент инерции определяется как:

$I = I_0 + mx^2$, где I_0 - момент инерции тела, ~~проходящ~~ относительно оси, проходящей через центр тела; x - расстояние между осями.

Тогда: $I = \frac{mr^2}{4} + mr^2 = \frac{5mr^2}{4}$.

Ответ: $I = \frac{5mr^2}{4}$.

Заключительный тур Олимпиады

Дата: 26.05.2020.

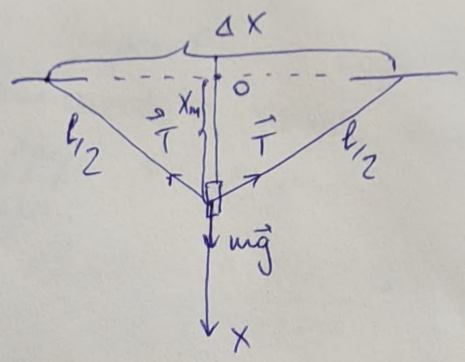
Время начала: 15:00

Время окончания: 17:20

ФИО участника: Чмыкало Дмитрий Александрович

3. $\Delta x,\ l$

$\omega - ?$



Запишем уравнение колебательного движения:

$$x = x_m \cdot \sin\omega t;$$

Возьмем производную по t: $v = \omega x_m \cdot \cos\omega t$,

где $\omega \cdot x_m = v_m$ – максимальная скорость тела.

Из рисунка найдем $x_m = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{\Delta x^2}{4}} = \frac{\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}{2}$.

Запишем закон сохранения энергии, выбрав нулевой отсчет потенциальной энергии тела на уровне, где смещение x максимально, т.е на уровне x_m:

$$\cancel{m} g x_m = \frac{\cancel{m} v_m^2}{2}; \quad g \cdot \frac{\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}{\cancel{2}} = \frac{v_m^2}{\cancel{2}}$$

Откуда: $v_m = \sqrt{g\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}$;

Тогда: $\omega = \frac{v_m}{x_m} = \frac{2\sqrt{g\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}}{\sqrt{l^2 - \Delta x^2}} = 2\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}}$.

Ответ: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}}$.

Заключительный тур Олимпиады

Дата: 26.05.2020

Время начала: 15:00

Время окончания: 17:20

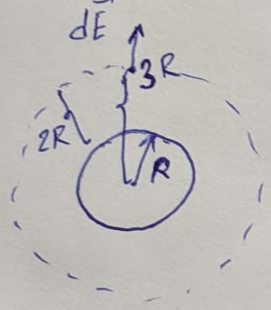
ФИО участника: Чмыхало Дмитрий Александрович

5. $\rho(r) = -\alpha r$

$r = 2R$

$E(2R) - ?$

$\varphi(2R) - ?$



Представим шар бесконечное количество сфер вложенных друг в друга.

Тогда:

$$dE(r) = \frac{k \cdot |q(r)| dr}{(3R)^2}$$ – напряженность от одной сферы.

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi r^2},$$ σ – поверхностный заряд

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Тогда: $$\rho = \frac{\sigma \cdot 4\pi r^2 \cdot 3}{4\pi r^3} = \frac{3\sigma}{r} \Rightarrow \sigma = \frac{\rho \cdot r}{3} = -\frac{\alpha \cdot r^2}{3}.$$

Теперь найдем напряженность поля на расстоянии 2R от поверхности шара:

$$E = \int_0^{3R} \frac{k \cdot |q| \cdot dr}{(3R)^2} = \int_0^{3R} \frac{k \cdot |\sigma \cdot S| dr}{(3R)^2} = \int_0^{3R} \frac{k \cdot \alpha \cdot r^2 \cdot 4\pi r^2 dr}{(3R)^2 \cdot 3} =$$

$$= \int_0^{3R} \frac{\alpha \cdot k \cdot 4\pi \cdot r^4 dr}{27R^2} = \frac{\alpha \cdot k\, 4\pi r^5}{5 \cdot 27 \cdot R^2}\Bigg|_0^{3R} = \frac{\alpha \cdot k \cdot 4\pi \cdot 243 R^5}{5 \cdot 27 R^2} =$$

$$= \frac{\alpha \cdot k \cdot 4\pi \cdot 9R^3}{5} = \frac{36 \alpha k \pi R^3}{5}.$$